

Invariantes de Curvas Planas Fechadas

Simone Moraes

Departamento de Matemática, UFBA

E-mail: simone.moraes@ufba.br

1 Resumo

A primeira tentativa sistemática de classificar curvas planas fechadas foi realizada por Whitney em 1937 [6], ele classificou as classes de isotopia dessas curvas pelo índice de rotação, que é dado pelo número de voltas completas que o vetor tangente faz ao percorrer a curva considerando sua orientação.

Em 1994 V. I. Arnold publicou artigos ([2] e [3]) em que define novos invariantes para esta classe de curvas introduzindo uma nova estratificação no conjunto da curvas planas fechadas. Especificamente Arnold definiu três invariantes básicos para aplicações estáveis do círculo no plano, a saber:

J^+ associado às tangências diretas (com orientações concordantes).

J^- associado às tangências inversas (com orientações opostas)

St associado aos pontos triplos.

Estes invariantes estimam o número de cruzamentos ao longo de um caminho, no espaço das aplicações suaves, que leva uma curva genérica em outra. Arnold mostrou que estes invariantes são aditivos em relação a soma conexa de curvas.

Em [5] foram introduzidos as noções de canais e pontes de curvas planas, que facilitam o cálculo destes invariantes. Uma ponte consiste em introduzir um retângulo no complemento da curva no plano, respeitando as orientações, decompondo a curva dada em duas curvas menores com invariantes conhecidos. O invariante da curva pode ser obtido em função dos invariantes das duas curvas e do índice da ponte em relação a curva dada.

Nesta palestra, apresentamos os invariantes de Arnold, os conceitos de pontes e canais em curvas planas e um mecanismo, introduzido na tese de C. Mendes de Jesus ([4]), que permite calcular os invariantes de Arnold para uma curva plana em função das pontes e de curvas com no máximo um ponto duplo. O principal resultado mostra que *uma curva com n pontos duplos é uma (curva) árvore se, e somente se, admite uma decomposição de exatamente n curvas dos tipos K_0 e K_2 e pontes sem pontos duplos ou uma decomposição de exatamente $n + 1$ curvas do tipo K_1 (isotópicas ao círculo) com pontes de pontos duplos*. Como consequência imediata deste resultado, temos as fórmulas para as famílias de curvas árvores, proposto como conjectura por Arnold em [2] e provado por Aicardi em [1].

Referências

- [1] F. Aicardi, *Tree-like Curves. In: Singularities and Bifurcations*. Advances in Soviet Mathematics, 21, AMS, Providence, 1-36, 1994.
- [2] V. I. Arnold, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*. University lecture series, Vol. 5, AMS Providence, 1994.

- [3] V. I. Arnold, *Plane Curves, Their Invariants, Perestroikas and Classifications*. Advances in Soviet Mathematics, Vol. 21, 1994. American Mathematical Society, 1994.
- [4] C. Mendes de Jesus, *Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano*, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 2001.
- [5] C. Mendes de Jesus e M. C. Romero Fuster, *Bridges, channels and Arnold's invariants for generic plane curves*, Topology and its Applications 125, 505-524, 2002.
- [6] H. WHITNEY, *On regular closed curves in the plane*. Compositio Math., 4 pags. 276-284, 1937.